Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: Učitelství pro 2. stupeň základní školy

Studijní obor Matematika - Informatika

ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI VYŠŠÍCH STUPŇŮ

ARITHMETIC SEQUENCES OF HIGHER ORDERS

Diplomová práce: DP–11–FP–KMD–006

Autor: Lucie Bernátová

Podpis: Bernátová

Vedoucí práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
76	0	16	0	15	1

V Liberci dne: 28. 4. 2011

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(pro magisterský studijní program)

pro (diplomant):	Lucie Bernátová
adresa:	Volfartice 84
studijní obor (kombinace):	Matematika - Informatika (pro ZŠ)
Název DP:	**Aritmetické posloupnosti vyšších stupňů**
Název DP v angličtině:	Arithmetic Sequences of Higher Orders
Vedoucí práce:	RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.
Konzultant:	
Termín odevzdání:	29. 4. 2011

Poznámka: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž formulují podrobnosti zadání. Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) na katedrách a na Děkanátě Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické TU v Liberci.

V Liberci dne 5. 11. 2010

děkan

vedoucí katedry

Převzal (diplomant): BERNÁTOVÁ LUCIE

Datum: 27. 4. 2011 Podpis: Bernátová

Název DP:	Aritmetické posloupnosti vyšších stupňů
Vedoucí práce:	RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.
Cíl:	- Seznámit se s problematikou aritmetických posloupností vyšších stupňů. - Vymyslet několik (nejméně 5) vhodných středoškolských příkladů, například z kombinatoriky, které mohou být řešeny pomocí těchto posloupností. - Promyslet metodiku, kdy a jakým způsobem tuto látku zařadit na obohacení výuky na SŠ. Využít při tom aktivní účast studentů (jejich vlastní zkoumání dílčích problémů). - Metodický postup ověřit v praxi.
Požadavky:	Znalosti základního kursu matematiky na VŠ a učebních osnov SŠ. Schopnost studovat učebnici psanou anglicky, ovládat textový editor.
Metody:	Analytické a syntetické.
Literatura:	1. Bittnerová, D.: Aritmetické posloupnosti s-tého stupně. The Mathematics Education into the 21st Century Project. Proceedings of the International Conference, The Special Czech/Slovak Teachers Day - The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education. Brno 2003. 2. Bryll, G.: Zastosowanie metody kolejnych różnic do stawiania hipotez induktivnych. Prace naukowe. In: Matematika VII. WSP, Czestochowa 1999. 3. Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha 1995. 4. Zhouf, J.: Aritmetická posloupnost 2. řádu. Rozhledy matematicko-fyzikální. Ročník 80 (2005), číslo 3. Učebnice matematiky pro základní školy. Sbírky úloh. Příručky matematických olympiád.

Čestné prohlášení

Název práce: **Aritmetické posloupnosti vyšších stupňů**

Jméno a příjmení autora: Lucie Bernátová

Osobní číslo: P07000804

Byl/a jsem seznámen/a s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má diplomová práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval/a samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložil/a elektronickou verzi mé diplomové práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedl/a jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 28. 4. 2011

Bernátová

Lucie Bernátová

Poděkování

Děkuji RNDr. Daniele Bittnerové, CSc. za odbornou pomoc při psaní diplomové práce.

Velký dík patří mé rodině a přátelům za podporu a pomoc při celém mém studiu.

Aritmetické posloupnosti vyšších stupňů

Anotace

Diplomová práce se zabývá aritmetickými posloupnostmi vyšších stupňů (řádů). Toto téma není zařazeno v rámcovém vzdělávacím programu středních škol, není uváděno ani v běžných vysokoškolských kurzech matematiky. Neexistuje ucelený text, zabývající se tímto tématem. Cílem práce bylo nalezení a uspořádání zákonitostí těchto posloupností, historický vývoj poznatků o nich a posouzení možnosti zařazení tohoto tématu ve středoškolské výuce. Na střední škole byl zkušebně zařazen výklad o těchto posloupnostech. Následná samostatná práce ověřila, že je téma možné zařadit do výuky, např. v seminářích.

Klíčová slova: historie posloupností, posloupnost, aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost, aritmetické posloupnosti vyšších řádů

Arithmetic sequences of higher orders

Annotation

The thesis is focused on arithmetic sequences of higher orders. This topic is not included in a general secondary schools curriculum, it is not mentioned in university mathematics courses either. A complete text dealing with this topic is not available. The aim of this work was finding and setting regularities of these rules, historical development of all the knowledge about them and to consider the possibility of placing this topic in a secondary schools curriculum. An explanation of these rules has been placed in secondary schools. The following autonomous working has checked that it is possible to place this topic in workshop lessons.

Key word: history of sequences, sequences, arithmetic sequence, geometric sequence, arithmetic sequences of higher orders

Arithmetische Folgen höherer Ordnung

Zusammenfassung

Die Diplomarbeit beschäftigt sich mit arithmetischen Folgen höherer Ordnung. Dieses Thema ist nicht in dem Fortbildungsprogramm für die Mittelschulen eingeordnet, ist aber auch nicht in häufigen Mathematik-Kursen an den Hochschulen eingeleitet. Es steht kein komplexer Text zur Verfügung, der sich mit diesem Thema beschäftigt. Das Ziel dieser Arbeit liegt in Erfinden und Anordnen von diesen arithmetischen Folgen, in historischer Entwicklung und in Untersuchung der Evetualitäten, ob dieses Thema auch in den Mittelschulunterricht eingeordnet sein kann. In einer Mittelschule hat man sich experimental mit dem Thema von diesen Folgen in dem Unterricht beschäftigt. Die nachfolgende selbständige Arbeit hat überprüft, dass dieses Thema zum Beispiel in Mathematikseminaren eingeordnet sein kann.

Schlagworte: Geschichte der Sequenzen, Sequenzen, aritmetische Folge, geometrische Folge, aritmetische Folgen höherer Ordnung

OBSAH

1. ÚVOD

Diplomová práce se zabývá aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů.

Některými aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů se zabývali matematici již od středověku, šlo většinou o mocninné posloupnosti a výpočet jejich součtů. Výjimečné postavení má Fibonacciho posloupnost a s ní související Zlatý řez.

V současnosti jsou v kurzech středoškolské matematiky zařazeny posloupnosti, aritmetické posloupnosti, geometrické posloupnosti, jejich vlastnosti a výpočet součtu konečného počtu členů.

V běžných kurzech a učebnicích matematiky na vysokých školách nejsou aritmetické posloupnosti vyšších řádů zařazeny. Kromě několika článků není k tématu dostupná literatura. V matematických olympiádách se sporadicky objevují úlohy související s aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů. Jde o úlohy, které lze řešit více způsoby.

Cílem diplomové práce je seznámení s problematikou aritmetických posloupností vyšších řádů, posouzení vhodnosti zařazení tématu do výuky matematiky a ověření možnosti realizace tohoto v praxi.

2. POSLOUPNOSTI V HISTORII

Okolo roku 2900 př. n. l. vznikají v Mezopotámii první klínopisné tabulky. Klínopis měl znaky i pro čísla. Jejich čtení bylo poměrně logické. Asyřané a Babyloňané byli výteční počtáři. Sčítání a odčítání zvládali poměrně zručně, většinou z hlavy. Součiny dvou čísel uměli převést na počítání s druhými mocninami. V konkrétních případech uměli řešit úlohy vedoucí k lineárním rovnicím i rovnicím vyšších řádů. Uměli počítat úroky, což dnes chápeme jako schopnost počítat s geometrickými posloupnostmi a řadami. To vše zvládli bez znalosti našich algebraických symbolů, jako +, –, =, /, vyjadřovali je slovy.

V roce 1170 se v rodině italského obchodníka a vysokého úředníka narodil Leonardo z Pisy řečený Fibonacci. Jeho otec později získal místo konzula v Alžírsku a mladý Leonardo tam odjel za ním. V severní Africe se seznámil s arabskými číslicemi. Zavedl v Evropě užívání nuly, kterou křesťanská církev nejprve odmítala. V roce 1202, dva roky po svém návratu do Pisy, vydal svou nejslavnější knihu Liber abaci (v překladu Kniha o abaku). Na několik set let se tato kniha stala základem algebry a aritmetiky. „Dnes bývá Fibonacci zmiňován především v souvislosti s popravdě řečeno poněkud hloupou matematickou úlohou (králičí posloupnost) zmiňovanou právě v této knize.“ V roce 1240 byl Fibonacci Republikou Pisa oceněn stipendiem (spíše důchodem) za zásluhu o rozvoj vědy. Odměnu dostal pod přezdívkou Leonardo Bogollo, což bývá překládáno dvěma způsoby - buď jako „cestovatel“ nebo „k ničemu se nehodící“ ([6] Mareš, 2008).

2. 1. ZLATÝ ŘEZ

„Geometrie má dva poklady. Pythagorovu větu a zlatý řez. První má cenu zlata, druhý připomíná spíše drahocenný kámen“ J. Kepler

Zlatý řez můžeme chápat jako poměr dvou čísel, řekněme a a b, kde větší číslo je k menšímu ve stejném poměru, jako součet těchto čísel k většímu. Tedy

$$a : b = (a + b) : a, a > b.$$

Zaveďme $a : b = c$. Vztah vede na kvadratickou rovnici

$$c^2 - c - 1 = 0,$$

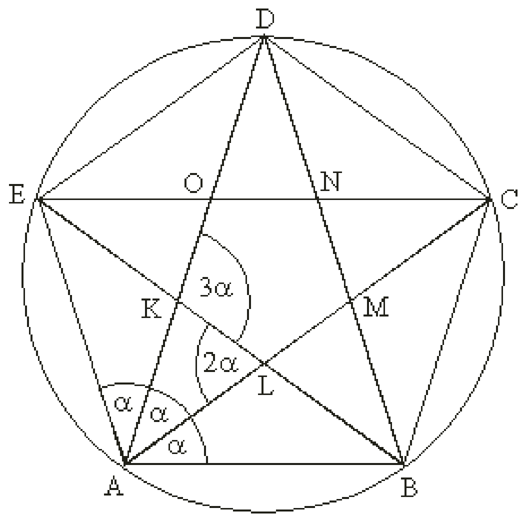
a

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, c_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

jsou kořeny této rovnice. Kořeny jsou iracionální čísla, c_1 = 1,618. Druhý kořen je záporný, vzhledem ke geometrické interpretaci nás nezajímá ([6] Mareš, 2008).

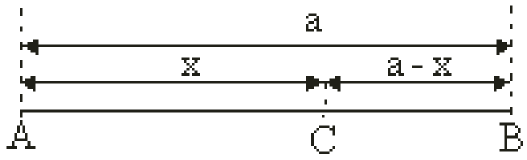
Ať už náhodou nebo záměrně, vyskytuje se zlatý řez ve výtvarném umění a architektuře již od starověku. Nejen zde se se zlatým řezem setkáváme. Nacházíme jej také v živé i neživé přírodě.

V 6. století př. n. l. žil Pythagoras ze Samu, významný filozof – matematik, zakladatel filozofické školy pythagorejců. Hlavní myšlenkou pythagorejců bylo „všechno je číslo“. Řekové převzali matematiku od Egypťanů, kteří se zabývali zejména geometrií. Proto neexistoval v řecké matematice podstatný rozdíl mezi tvary a čísly. Pythagoras chápal spojení mezi číslem a tvarem jako něco mystického. Souvislost čísla a tvaru měla skrytý význam a ty nejkrásnější útvary, geometrické obrazce, byly považovány za posvátné. Jedním z těchto útvarů byla pěticípá hvězda (pentagram). Pokud spojíme sousední vrcholy pentagramu úsečkami, vznikne pětiúhelník (pentagon). Pokud spojíme protilehlé vrcholy pentagramu, získáme menší pentagon, proti původnímu pentagonu otočený. Spojením protilehlých vrcholů tohoto pentagonu získáme další pentagram. A tak můžeme pokračovat dále a rýsovat stále menší hvězdy a pětiúhelníky. Jejich strany budou stále zachovávat poměr stran původního obrazce. Tuto vlastnost můžeme popsat jako sebereplikovatelnost. Pro pythagorejce bylo nejdůležitější, že obrazec v sobě skrývá vztah – poměr odpovídající zlatému řezu. Úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku se protínají v poměru zlatého řezu a poměr úhlopříček a stran pravidelného pětiúhelníku je také zlatý ([11] Seife, 2005).



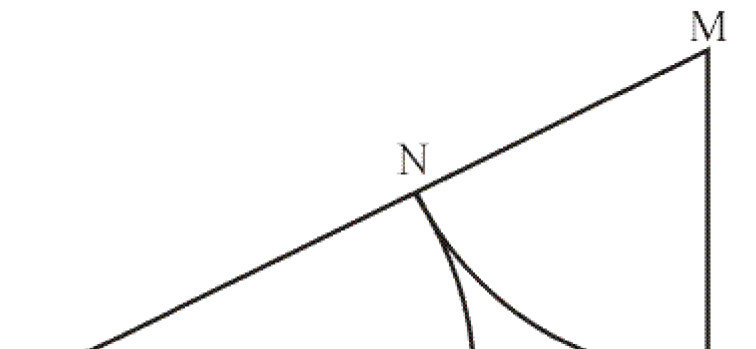
Obr. 1: Pentagram [1]

Starověcí Řekové vysvětlují zlatý řez jako poměr stran obdélníka, který nejvíce lahodí lidskému oku. O zlatém řezu se zmiňuje Euklides (325 – 265 př. n. l.) v úvodu 6. knihy svých Základů: „Rozděl úsečku na dva díly tak, aby obdélník, jehož jedna strana je úsečka a druhá strana je menší z dílů, měl stejný obsah jako čtverec nad větším dílem“ ([6] Delvin, 2003).



Obr. 2: Zlatý řez znázorněný na úsečkách [1]

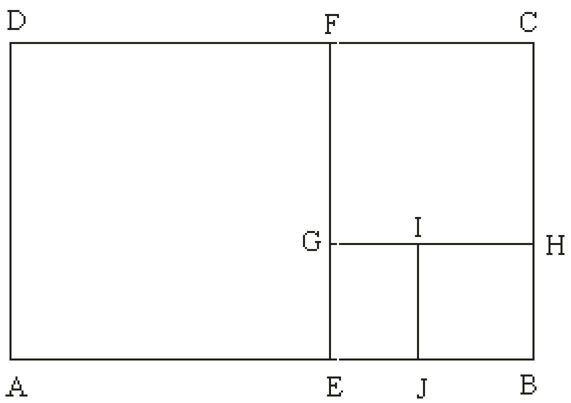
Další z možných konstrukcí zlatého řezu pochází od Heróna (10 - 70).



Obr. 3: Herónovo znázornění zlatého řezu [1]

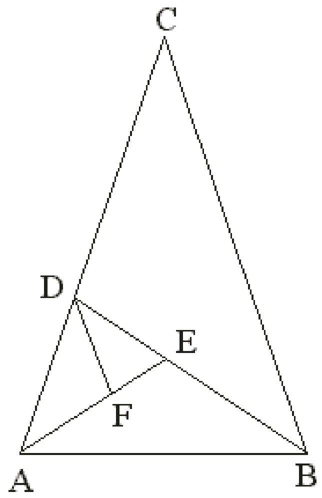
Sestrojíme úsečku AB. V bodě B vztyčíme kolmici k přímce AB a vyznačíme bod M s vlastností |BM| = ½ |AB|. Sestrojíme úsečku AM. Sestrojíme kružnici *k* se středem v M a poloměrem *r* = |BM| a průsečík označíme N. Nyní sestrojíme kružnici se středem A a poloměrem |AN|, její průsečík s úsečkou AB označíme C. Bod C je dělícím bodem zlatého řezu.

Hledáme-li zlatý řez, hledáme vlastně obdélník se zajímavou vlastností: sestrojíme-li nad jeho větší stranou čtverec a připojíme jej k původnímu obdélníku, získáme obdélník podobný. Délky stran těchto podobných obdélníků jsou samozřejmě v poměru zlatého řezu.



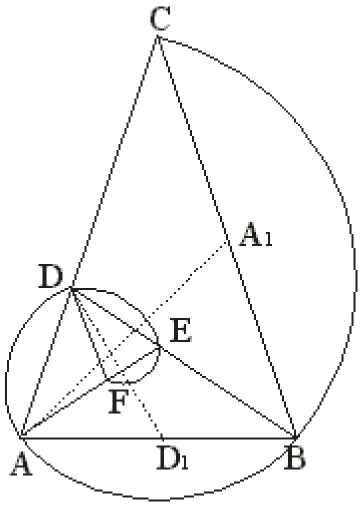
Obr. 4: Zlatý obdélník [1]

Dalším zajímavým planimetrickým útvarem je tzv. zlatý trojúhelník, jehož délky ramen a základny jsou v poměru zlatého řezu. Pokud do zlatého trojúhelníku postupně vepisujeme rovnoramenné trojúhelníky, které mají jako jedno rameno základnu předcházejícího trojúhelníku, bude každý z těchto trojúhelníků zlatý.



Obr. 5: Zlatý trojúhelník [1]

Vrcholy postupně vepisovaných trojúhelníků leží na spirále nazývané zlatá logaritmická spirála.



Obr. 6: Zlatá logaritmická spirála [1]

Růst neživých částí živých tvorů se řídí právě touto zlatou logaritmickou spirálou. Jedná se například o rohy, parohy, kly, schránky měkkýšů, ulity plžů či hlavonožců.

Pojem zlatý řez zavedl Leonardo da Vinci. Zlatý řez jako estetický kánon se uplatňuje v malířství, sochařství, architektuře a fotografii. V obrazech například Leonarda da Vinciho, Raffaela Santiho, Albrechta Dürera a Bohumila Kubišty se se zlatým řezem setkáváme jak při volbě formátu díla, tak i při koncepci malby. Sochařská díla byla v antice tvořena nejen dle estetického cítění, ale proporce soch byly předem vypočteny s využitím zlatého řezu. Parthenón, gotický chrám Notre-Dame a půdorysné proporce pražského chrámu sv. Víta ilustrují užití zlatého řezu v architektuře ([11] Seife, 2005).

2. 2. POSLOUPNOSTI A ZLATÝ ŘEZ

Jak souvisí zlatý řez s posloupnostmi? Fibonacci sestavil nekonečnou posloupnost (Fibonacciho posloupnost):

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

Počínaje třetím členem je každý další člen součtem dvou předchozích členů. Je pozoruhodné, že podíl n – tého a $(n - 1)$ – ho členu se s rostoucím n přibližuje k hodnotě zlatého řezu. Zaokrouhlené hodnoty podílu prvních členů jsou následující:

2; 1,5; 1,667; 1,6; 1,625; 1,615; 1,619; 1,618; 1,618, …

Ke zlatému řezu vede i další posloupnost sestavena Fibonaccim, tzv. zlatá nit, známá spíše pod názvem králičí posloupnost. Tato posloupnost je také nekonečná. Její první členy jsou:

1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, …

Konstrukce posloupnosti je následující:

Zakládáme chov králíků. Začneme jedním chovným párem. Králíci se rozmnožují po krocích stejné délky, řekněme generacích. Každý mladý pár se v prvním kroku svého života ještě nerozmnožuje, v každém dalším kroku zplodí zase jeden pár. Dospělé páry nestárnou a jejich rozmnožování není časově omezené. Sledujeme, jak se bude vyvíjet osazenstvo „králíkárny“. *„Plodné páry označme 1, mladé, neplodné jako 0.*

Máme jeden plodný pár: 1.

V prvním kroku se dospělému páru narodí mladý pár a dospělý pár tam zůstane. Takže 1, 0.

Ve druhém kroku mladý pár dospěje (ale ještě se nerozmnoží) a dospělý pár má další mladé. Stav králíkárny je tedy 1, 0, 1.

Ve třetím kroku mladý pár dospěje (nerozmnoží se) a oba dospělé páry mají potomstvo. Stav je tedy 1, 0, 1, 1, 0.

Ve čtvrtém kroku bude stav 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1 a tak to půjde dál.

Když spočítáme počet párů v každém kroku, je to 1, pak 2, pak 5, pak 8 a dá se dokázat, že i další čísla tvoří právě Fibonacciho posloupnost.“ (Mareš, 2008)

Podivuhodná je souvislost Fibonacciho posloupnosti s morfologií rostlin. Počty okvětních lístků jsou téměř u všech rostlin jedním z čísel 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. Například lilie mají tři okvětní lístky, blatouchy pět, většina ostrožek jich má osm, měsíčky třinác t, astry mají dvacet jeden okvětní lístek, většina sedmikrásek má třicet čtyři, padesát pět nebo osmdesát devět okvětních lístků.

Okvětní lístky nejsou jediným místem, kde nacházíme Fibonacciho čísla. Semínka slunečnice jsou uspořádána do dvou tříd protínajících se spirál. Počty spirál jsou velmi často 34 a 55 nebo 55 a 89 v závislosti na druhu slunečnice. ([12] Stewart, 1996)

3. Posloupnosti – základní pojmy

V této kapitole definujeme základní pojmy týkající se posloupností.

3. 1. Pojem posloupnost

Definice 1. Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina **N** všech přirozených čísel, se nazývá nekonečná posloupnost.

Definice 2. Každá funkce, jejíž definiční obor je množina všech přirozených čísel $n \leq n_0$, kde n_0 je pevně dané číslo z **N**, se nazývá konečná posloupnost.

Definice 3. Funkční hodnoty posloupnosti (nekonečné i konečné) se nazývají členy posloupnosti. Funkční hodnota posloupnosti v bodě $n \in$ **N** se nazývá n – tý člen posloupnosti a značí se f_n anebo častěji a_n, b_n apod.

3. 2. MOŽNOSTI ZADÁNÍ POSLOUPNOSTI

Konečná posloupnost může být zadána výčtem čísel, např.: 2, 8, -5, 21. Případně může být uspořádána do tabulky, kde a_n je n – tý člen posloupnosti.

n	1	2	3	4
a_n	2	8	-5	21

Konečná i nekonečná posloupnost může být zadána vzorcem pro $n -$ tý člen a_n, např.:

$$a_n = -2 + \frac{n}{3}\,, (a_n)_{n=1}^{5}\,.$$

Předešlou posloupnost lze zapsat také výrazem

$$\left(-2 + \frac{n}{3}\right)_{n=1}^{5}.$$

Méně často se pro zadání posloupnosti užívá běžného zápisu pro funkce

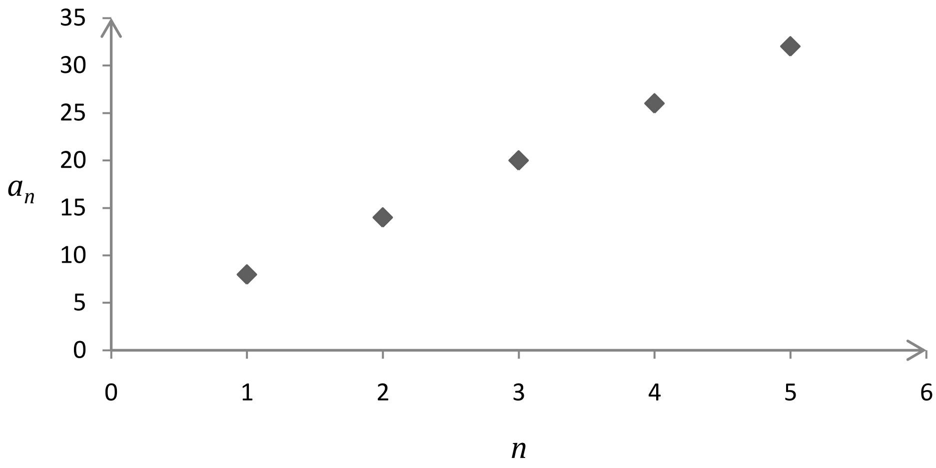
$$f\colon y = \frac{n+1}{n+3}, n \in \mathbf{N}.$$

Grafem posloupnosti v kartézské souřadné soustavě jsou izolované body.

PŘÍKLAD 1. Zapište předpisem pro n – tý člen posloupnost všech přirozených čísel, která při dělení 6 dávají zbytek 2. Sestrojte graf posloupnosti pro $n \leq 5$.

Řešení:

$a_n = 6n + 2$



PŘÍKLAD 2. Posloupnost je dána předpisem pro n – tý člen. Napište prvních šest členů a sestrojte graf pro $n \leq 6$.

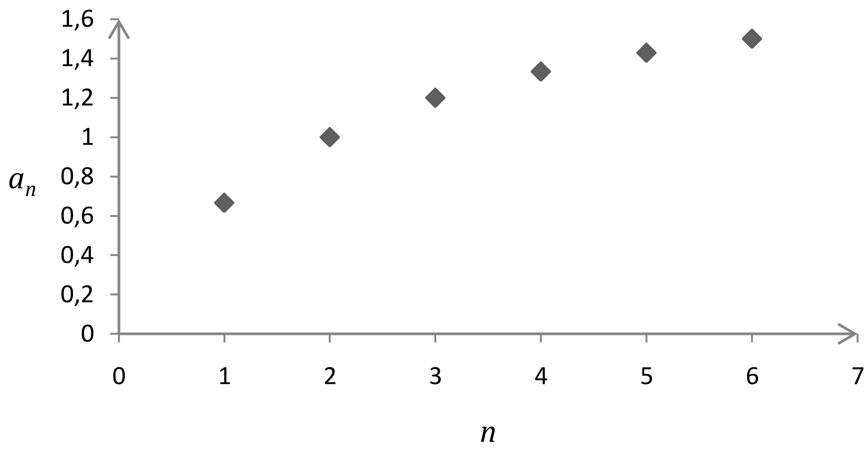
a) $a_n = \dfrac{2n}{n+2}$

b) $a_n = (n+1) \cdot (-1)^n$

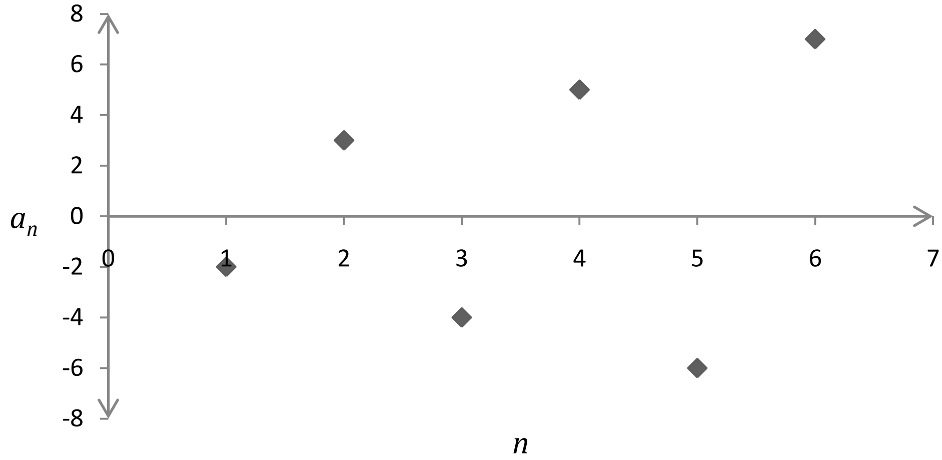
c) $a_n = n^2 - 2^n$

Řešení:

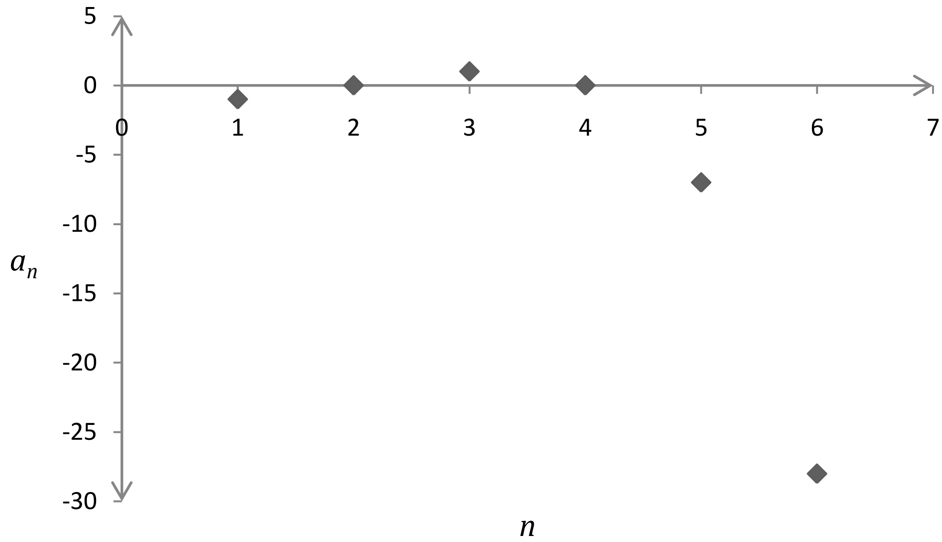
a) $a_1 = \dfrac{2}{3}, a_2 = \dfrac{4}{4} = 1, a_3 = \dfrac{6}{5}, a_4 = \dfrac{8}{6}, a_5 = \dfrac{10}{7}, a_6 = \dfrac{12}{8}$



b) $a_1 = -2, a_2 = 3, a_3 = -4, a_4 = 5, a_5 = -6, a_6 = 7$



c) $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0, a_5 = -7, a_6 = -28$



Posloupnost lze také zadat rekurentně. To znamená, je zadán první člen (nebo několik prvních členů) a předpis, podle něhož lze postupně určit další členy.

PŘÍKLAD 3. Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních pět členů posloupnosti a sestrojte graf pro $n \leq 5$.

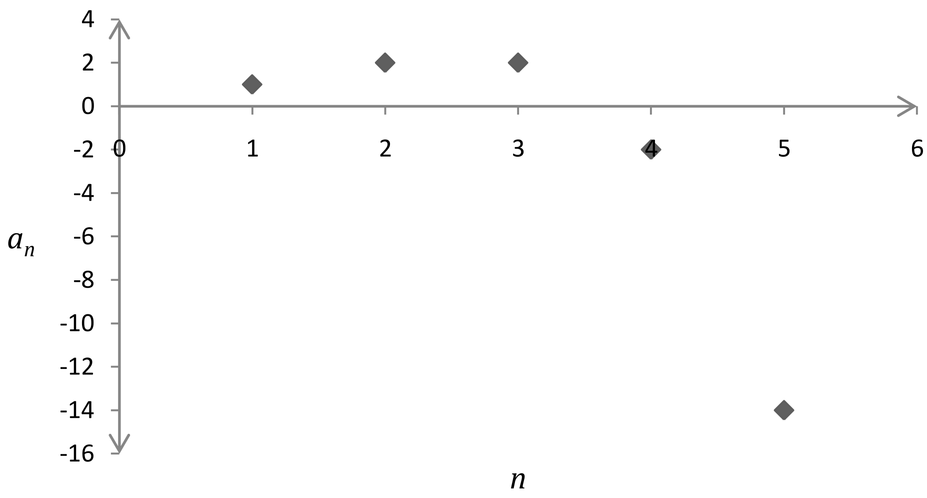
$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-2}$

Řešení:

$a_3 = 3a_2 - 4a_1 = 2, a_4 = 3a_3 - 4a_2 = -2, a_5 = 3a_4 - 4a_3 = -14$



PŘÍKLAD 4. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentně, $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n, n \in \mathbf{N}$. Vyjádřete ji předpisem pro n – tý člen.

Řešení:

$a_1 = 5$

$a_2 = 3 \cdot a_1$

$a_3 = 3 \cdot a_2$

$\vdots$

$a_n = 3 \cdot a_{n-1}$

Předchozích n rovností vynásobíme mezi sebou.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = 5 \cdot 3 \cdot a_1 \cdot 3 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot 3 \cdot a_{n-1}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = 5 \cdot 3^{n-1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$$

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$$

PŘÍKLAD 5. Posloupnost zadanou vzorcem $(\log 3^n)_{n=1}^{\infty}$ vyjádřete rekurentně.

Řešení:

$a_1 = \log 3$

$a_2 = \log 3^2 = 2 \log 3 = a_1 + \log 3$

$\vdots$

$a_{n-1} = \log 3^{n-1} = (n-1) \cdot \log 3$

$a_n = \log 3^n = n \log 3 = a_{n-1} + \log 3.$

Rekurentní vyjádření posloupnosti $a_1 = \log 3\,, a_n = a_{n-1} + \log 3.$

3. 3. VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ

V této kapitole definujeme základní vlastnosti posloupností.

DEFINICE 4. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

rostoucí posloupnost, je-li $a_{n+1} > a_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$;

klesající posloupnost, je-li $a_{n+1} < a_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$;

neklesající posloupnost, je-li $a_{n+1} \geq a_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$;

nerostoucí posloupnost, je-li $a_{n+1} \leq a_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

DEFINICE 5. Rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí posloupnosti nazýváme souhrnně monotónními posloupnostmi. Posloupnosti rostoucí a klesající se souhrnně nazývají ryze monotónní posloupnosti.

DEFINICE 6. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

shora omezená, existuje-li takové číslo $h \in \mathbf{R}$, že $a_n \leq h$ pro každé $n \in \mathbf{N}$;

zdola omezená, existuje-li takové číslo $d \in \mathbf{R}$, že $a_n \geq d$ pro každé $n \in \mathbf{N}$;

omezená posloupnost, je-li omezená shora i zdola.

PŘÍKLAD 6. Určete, zda je posloupnost

$$a_n = \frac{2n}{n+2}$$

omezená a monotónní.

Řešení:

Je rostoucí, neboť $\forall n \in \mathbf{N}$ platí:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+3} - \frac{2n}{n+2} = \frac{4}{(n+3)-(n+2)} = \frac{4}{1} > 0.$$

Je omezená shora, neboť $\forall n \in \mathbf{N}$ platí

$$a_n = \frac{2n}{n+2} = 2 - \frac{2}{n+2} < 2.$$

Je omezená zdola, neboť $\forall n \in \mathbf{N}$ platí

$$a_n = \frac{2n}{n+2} = 2 - \frac{2}{n+2} > 1.$$

Tedy posloupnost je omezená.

4. ARITMETICKÉ A GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

Významné role mezi posloupnostmi zaujímají aritmetické a geometrické posloupnosti. Obě mají četná využití v praxi.

4. 1. ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

DEFINICE 7. Aritmetická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d \ \forall n \in \mathbf{N}, d \neq 0$$

kde *a, d* jsou daná čísla. Číslo d se nazývá diference aritmetické posloupnosti.

Z předchozího plyne, že v aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí

- $a_{n+1} - a_n = d \ \forall n \in \mathbf{N}$.
- $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \ \forall n \in \mathbf{N}$.
- $a_s = a_r + (s-r) \cdot d \ \forall r, s \in \mathbf{N}$.

Pokud $d = 0$, platí $a_n = a_1 \ \forall n \in \mathbf{N}$. Jde o konstantní posloupnost.

PŘÍKLAD 7. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány její členy $a_2 = 4, a_7 = 19$. Určete diferenci d a členy a_1, a_{13}.

Řešení:

$$a_7 = a_2 + (7-2) \cdot d$$

$$19 = 4 + 5d$$

$$d = 3$$

$a_2 = a_1 + d$

$4 = a_1 + 3$

$a_1 = 1$

$a_{13} = a_1 + (13 - 1) \cdot d$

$a_{13} = 1 + 12 \cdot 3$

$a_{13} = 37$

Příklad 8. V aritmetické posloupnosti je zadán první člen $a_1 = 16$ a diference $d = 4$.

a) Kolikátý člen je roven číslu 104?

b) Kolikátý člen je roven číslu 90?

Řešení:

a) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$104 = 16 + (n - 1) \cdot 4$

$92 = 4n$

$n = 23$

Číslu 104 je roven 23. člen.

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$90 = 16 + (n - 1) \cdot 4$

$$78 = 4n$$

Žádný člen není roven číslu 90.

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Tento vztah můžeme chápat jako součin počtu členů a průměrné hodnoty členů. Důkaz lze provést matematickou indukcí.

Důkaz:

1) $s_2 = a_1 + a_2 = 2 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2}$

2) předpokládejme $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

dokažme $s_{n+1} = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} \cdot (n+1)$

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n+1) \cdot d] + a_1 + n \cdot d =$$

$$= n \cdot a_1 + \frac{n}{2} \cdot (n+1) \cdot d + a_1 + n \cdot d =$$

$$= (n+1) \cdot a_1 + \frac{n^2}{2} \cdot d - \frac{n}{2} \cdot d + n \cdot d =$$

$$= (n+1) \cdot a_1 + \frac{n^2}{2} \cdot d + \frac{n}{2} \cdot d = (n+1) \cdot a_1 + \frac{n}{2} \cdot d \cdot (n+1) =$$

$$= (n+1) \cdot \left(a_1 + \frac{n}{2} \cdot d\right) = (n+1) \cdot \frac{2a_1 + n \cdot d}{2} =$$

$$= (n+1) \cdot \frac{a_1 + a_{n+1}}{2}$$

V roce 1786 v německém městě Brunswick zadal pan učitel žákům, aby sečetli přirozená čísla od 1 do 60. Jeden z žáků tuto úlohu bleskurychle vyřešil. Nesečítal čísla. Průměrnou hodnotu čísel 30,5 vynásobil počtem čísel. Bez předchozí znalosti odvodil vztah pro součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti. Tím žákem byl devítiletý Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Osvícený učitel nepokáral malého Karla Gausse za narušení výuky nevhodným využíváním postupů, které nejsou v osnovách, ale zajel do Hamburku a koupil mu kvalitní učebnici matematiky, aby se měl z čeho učit ([6] Mareš, 2008).

PŘÍKLAD 9. Vypočítejte součet všech přirozených dvojciferných čísel.

Řešení:

$$n = 90, a_1 = 10, a_{90} = 99$$

$$s_{90} = 90 \cdot \frac{10 + 99}{2} = 8955$$

PŘÍKLAD 10. Dokažte, že součet prvních *n* lichých čísel je n^2.

Řešení:

$$a_1 = 1, d = 2, a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$$

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{1 + 2n - 1}{2} = n \cdot n = n^2 \; \forall n \in \mathbf{N}$$

4. 2. CVIČENÍ K ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI

PŘÍKLAD 11. Součet tří po sobě následujících členů aritmetické posloupnosti je 66, součin těchto členů je 946. Určete tyto členy.

Řešení:

(1) $$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 66$$

$$a_n + (a_n + d) + (a_n + 2d) = 66$$

$$3a_n + 3d = 66$$

$$a_n + d = 22$$

(2) $$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 946$$

$$(22 - d) \cdot 22 \cdot (22 + d) = 946$$

$$(22 - d) \cdot (22 + d) = 43$$

$$484 - d^2 = 43$$

$$d^2 = 441$$

Úloha má dvě řešení.

$d = 21;\ a_n = 1, a_{n+1} = 22, a_{n+2} = 43$

$d = -21;\ a_n = 43, a_{n+1} = 22, a_{n+2} = 1$

PŘÍKLAD 12. Aritmetická posloupnost je zadána předpisem pro *n* – tý člen

$$a_n = \frac{1}{8} \cdot (5 - 4n).$$

a) Vypočtěte a_1, d.

b) Vypočtěte součet prvních pěti členů posloupnosti.

c) Vypočtěte součet druhých pěti členů posloupnosti.

Řešení:

a) $a_1 = \frac{1}{8} \cdot (5 - 4 \cdot 1) = \frac{1}{8}$

$$d = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{8} \cdot [5 - 4 \cdot (n + 1)] - \frac{1}{8} \cdot (5 - 4n) = \frac{1}{8} \cdot (-4) = -\frac{1}{2}$$

b) $s_5 = 5 \cdot \frac{a_{1+}a_5}{2} = 5 \cdot \frac{2a_1 + 4d}{2} = 5 \cdot (a_1 + 2d) = 5 \cdot \left(\frac{1}{8} - 1\right) =$

$= 5 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{35}{8}$

c) $s_{10} = 10 \cdot \frac{a_{1+}a_{10}}{2} = 10 \cdot \frac{2a_1 + 9d}{2} = 5 \cdot (2a_1 + 9d) = 5 \cdot \left(\frac{2}{8} - \frac{9}{2}\right) =$

$= 5 \cdot \left(-\frac{34}{8}\right) = -\frac{170}{8}$

$$s_{10} - s_5 = -\frac{170}{8} + \frac{35}{8} = -\frac{135}{8}$$

Příklad 13. V aritmetické posloupnosti známe první člen $a_1 = 15$ a diferenci $d = -7$. Určete $n \in \mathbf{N}$ tak, aby platilo $a_n + a_{n+4} = -40$.

Řešení:

$$a_1 + (n - 1) \cdot d + a_1 + (n + 3) \cdot d = -40$$

$$2a_1 + (2n+2) \cdot d = -20$$

$$a_1 + (n+1) \cdot d = -20$$

$$15 + (n+1) \cdot (-7) = -20$$

$$-7 \cdot (n+1) = -35$$

$$n + 1 = 5$$

$$n = 4$$

Příklad 14. V aritmetické posloupnosti je znám pátý člen

$$a_5 = -20.$$

Stanovte podmínku pro diferenci tak, aby součet prvních 10 členů byl kladný.

Řešení:

$$s_{10} = 10 \cdot \frac{a_1 + a_{10}}{2}$$

$$a_1 = a_5 - 4d, a_{10} = a_5 + 5d$$

tedy

$$s_{10} = 10 \cdot \frac{a_5 - 4d + a_5 + 5d}{2} = 5 \cdot (2a_5 + d)$$

$$5 \cdot (2a_5 + d) > 0$$

$$d > -2a_5$$

$$d > 40$$

***Příklad* 15.** Je zadána nerovnice $x^2 - 37x - 120 \leq 0$.

a) Určete součet všech sudých čísel splňujících tuto nerovnici.

b) Určete součet všech lichých čísel splňujících tuto nerovnici.

Řešení:

Nerovnici převedeme do tvaru $(x+3)\cdot(x-40) \leq 0$, řešením je $x \in \langle -3;\ 40 \rangle$.

a) Sudá čísla splňující nerovnici tvoří aritmetickou posloupnost $a_1 = -2, d = 2, a_{22} = 40$.

$$s_{22} = 22 \cdot \frac{a_1 + a_{22}}{2} = 22 \cdot \frac{-2+40}{2} = 418$$

b) Lichá čísla splňující nerovnici tvoří aritmetickou posloupnost $a_1 = -3, d = 2, a_{22} = 39$.

$$s_{22} = 22 \cdot \frac{a_1 + a_{22}}{2} = 22 \cdot \frac{-3+39}{2} = 396$$

4. 3. GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

DEFINICE 8. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická, právě když existuje takové reálné číslo q, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, q \neq 0, q \neq 1.$$

Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

Z předchozího plyne, že v geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem $q \neq 0$ platí

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\ \forall n \in \mathbf{N}$.
- $a_s = a_r \cdot q^{s-r}\ \forall r, s \in \mathbf{N}$.

Pokud $q = 1$, platí $a_n = a_1\ \forall n \in \mathbf{N}$. Jde o konstantní posloupnost.

PŘÍKLAD 16. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány její členy $a_5 = 20, a_7 = 5$. Určete kvocient q a členy a_1, a_{10}.

Řešení:

$$q = \frac{a_7}{a_5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, q = \pm\frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{a_5}{q^4} = 20 \cdot 16 = 320$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q$$

Úloha má dvě řešení.

$$q = \frac{1}{2};\ a_1 = 320, a_{10} = \frac{5}{8}$$

$$q = -\frac{1}{2};\ a_1 = 320, a_{10} = -\frac{5}{8}$$

Příklad 17. Určete první člen a_1, druhý člen a_2 a kvocient q geometrické posloupnosti, ve které platí

$$a_2 + a_4 = 17,$$

$$a_2 \cdot a_4 = 16.$$

Řešení:

$$a_2 + a_2 \cdot q^2 = 17$$

$$a_2 \cdot a_2 \cdot q^2 = 16$$

Řešení předchozí soustavy rovnic

$$a_2 = 16, q = \pm\frac{1}{4};$$

$$a_2 = 1, q = \pm 4.$$

Úloha má čtyři řešení

$$a_2 = 16; q = \frac{1}{4};\ a_1 = 64;\ a_4 = 1;$$

$$a_2 = 16; q = -\frac{1}{4};\ a_1 = -64;\ a_4 = 1;$$

$$a_2 = 1; q = 4;\ a_1 = \frac{1}{4};\ a_4 = 16;$$

$a_2 = 1; q = -4;\ a_1 = -\frac{1}{4};\ a_4 = 16.$

Odvoďme vztah pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q.

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \tag{1}$$

Rovnici (1) vynásobíme q.

$$s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \tag{2}$$

Rovnice (1), (2) odečteme.

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

$$s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Tedy pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí:

a) je-li $q = 1$, pak

$$s_n = n \cdot a_1;$$

b) je-li $q \neq 1$, pak

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

PŘÍKLAD 18. Vypočtěte součet prvních *7* členů geometrické posloupnosti, kde $a_1 = 15, q = -2$.

Řešení:

$$s_7 = 15 \cdot \frac{1-(-2)^7}{1+2} = 5 \cdot 129 = 645$$

PŘÍKLAD 19. V geometrické posloupnosti platí $s_4 = 4 \cdot s_2$. Určete a_1, q.

Řešení:

a) pro $q = 1$ platí

$$s_4 = 4, s_2 = 2a_1.$$

Zadaný vztah je splněn pro $a_1 = 0$.

b) pro $q \neq 1$ platí

$$s_4 = a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q}, s_2 = a_1 \frac{1-q^2}{1-q}.$$

Po dosazení do zadaného vztahu

$$a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 4a_1 \cdot \frac{1-q^2}{1-q}, a_1 \in \mathbf{R} - \{0\}$$

$$1 - q^4 = 4 \cdot (1 - q^2)$$

$$1 + q^2 = 4$$

$$q = \pm\sqrt{3}$$

4. 4. CVIČENÍ KE GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

PŘÍKLAD 20. Délky hran kvádru jsou třemi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti. Objem kvádru je 512 cm², součet délek hran je 112 cm. Určete délky hran.

Řešení:

délky hran $a, b = aq, c = aq^2$

objem $V = a \cdot aq \cdot aq^2 = a^3q^3$ (1)

$$a^3q^3 = 512$$

součet délek hran $s = 4 \cdot (a + aq + aq^2)$ (2)

$$a + aq + aq^2 = \frac{112}{4} = 28$$

Soustava rovnic (1), (2) má dvě řešení.

$$q = 2, a = 4, b = 8, c = 16$$

$$q = \frac{1}{2}, a = 16, b = 8, c = 4$$

PŘÍKLAD 21. Určete číslo x tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 byla prvními třemi členy geometrické posloupnosti.

$$a_1 = \log x - 1, a_2 = 2\log x, a_3 = 5\log x + 3$$

Řešení:

Zavedeme substituci $\log x = z$.

$$a_1 = z - 1, a_2 = 2z, a_3 = 5z + 3$$

Pro člen geometrické posloupnosti musí platit

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}, \text{tedy } a_3 \cdot a_1 = a_2^2.$$

$$(5z + 3) \cdot (z - 1) = 4z^2$$

Rovnice má dvě řešení

$z = 3, \log x = 3$ tedy $x = 1000$;

$z = -1, \log x = -1$ tedy $x = 0{,}1$.

Příklad 22. Cena elektrické energie každoročně roste o 12 %.

a) Za kolik let naroste cena na dvojnásobek?

b) Za kolik let naroste cena na čtyřnásobek?

Řešení:

a_1 ... původní cena určitého množství

a_n ... cena téhož množství za n let

$a_2 = a_1 \cdot q$, kde $q = 1{,}12$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

a) $a_n = 2a_1$

$2a_1 = a_1 \cdot 1{,}12^{n-1}$

$n - 1 \cong 6{,}1$

$n = 7{,}1$

b) $a_n = 4a_1$

$4a_1 = a_1 \cdot 1{,}12^{n-1}$

$n - 1 \cong 12{,}2$

$n = 13{,}2$

Příklad 23. Každoroční inflace je 2 %. Za kolik let klesne hodnota o 50%?

Řešení:

a_1 ... současná hodnota určité částky

$a_2 = 0{,}98a_1$ … hodnota téže částky za rok

$a_n = a_1 \cdot 0.98^{n-1}$ … hodnota téže částky za *n* let

$a_n = 0{,}5a_1$

$0{,}5a_1 = a_1 \cdot 0{,}98^{n-1}$.

$n - 1 \cong 34{,}3$

$n \cong 35{,}3$

4. 5. VLASTNOSTI ARITMETICKÝCH A GEOMETRICKÝCH POSLOUPNOSTÍ

Aritmetická posloupnost s diferencí d je rostoucí pro $d < 0$, klesající pro $d < 0$.

Geometrická posloupnost s kvocientem q je

a) rostoucí, právě když

$$a_1 > 0, q > 1 \text{ nebo } a_1 < 0, 0 < q < 1;$$

b) klesající, právě když

$$a_1 > 0, 0 < q < 1 \text{ nebo } a_1 < 0, q > 1.$$

Pro aritmetickou posloupnost s diferencí d platí:

a) Je-li $d > 0$, pak je zdola omezená, ale není shora omezená.

b) Je-li $d < 0$, pak je shora omezená, ale není zdola omezená.

c) Je-li $d = 0$, pak je shora omezená i zdola omezená.

Geometrická posloupnost s kvocientem q

a) je omezená, právě když $|q| \leq 1$ nebo $a_1 = 0$;

b) je zdola omezená, ale není shora omezená, právě když $a_1 > 0, q > 1$;

c) je shora omezená, ale není zdola omezená, právě když $a_1 < 0, q > 1$;

d) není ani shora ani zdola omezená, právě když $a_1 \neq 0, q < -1$.

PŘÍKLAD 25. Rozhodněte, které z uvedených posloupností jsou rostoucí, které jsou klesající. Dále, které posloupnosti jsou omezené shora, které jsou omezené zdola.

a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}, a_1 = -10, a_{n+1} = a_n - 3$

b) $(a_n)_{n=1}^{\infty}, a_1 = -10, a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$

c) $a_1 = 5, d = 0$

d) $(3^n)_{n=1}^{\infty}$

e) $(-3^n)_{n=1}^{\infty}$

f) $((-3)^n)_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) $a_{n+1} < a_n$, tedy posloupnost je klesající

$a_1 = -10$ je maximální hodnota členů, posloupnost je shora omezená

b) $a_{n+1} > a_n$, tedy posloupnost je rostoucí

$a_1 = -10$ je minimální hodnota členů, posloupnost je zdola omezená

c) $a_i = a_1$ pro $i \in \boldsymbol{N}$, tedy posloupnost je konstantní, omezená zdola i shora

d) $a_{n+1} > a_n$, tedy posloupnost je rostoucí

$a_1 = 3$ je minimální hodnota členů, posloupnost je zdola omezená

e) $a_{n+1} > a_n$, tedy posloupnost je rostoucí

$a_1 = -3$ je minimální hodnota členů, posloupnost je zdola omezená

f) posloupnost není rostoucí ani klesající, není omezená

5. OBECNÉ POSLOUPNOSTI VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

DEFINICE 9. Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_s, \cdots)$ je nekonečná posloupnost tvořena prvky jakéhokoli oboru integrity. Např. $(\boldsymbol{C}, +, \cdot), (\boldsymbol{R}, +, \cdot), (\boldsymbol{Q}, +, \cdot)$. Rekurentně definujme <u>nekonečnou čtvercovou matici</u> $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}) = \left(\Delta_{r,s}\right)_{r,s\geq 1}$, kde $\Delta_{1,s} = a_s$; $\Delta_{r,s} = \Delta_{r-1,s+1} - \Delta_{r-1,s}$ pro všechna $r > 1$ a $s \geq 1$.

Znázornění matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a})$:

$\Delta_{1,1} = a_1 = b_1$	$\Delta_{1,2} = a_2$	$\Delta_{1,3} = a_3$	$\Delta_{1,4} = a_4$	$\Delta_{1,5} = a_5$	$\Delta_{1,6} = a_6$	$\cdots$	$\Delta_{1,s} = a_s$
$\Delta_{2,1} = b_2$	$\Delta_{2,2}$	$\Delta_{2,3}$	$\Delta_{2,4}$	$\Delta_{2,5}$	$\Delta_{2,6}$	$\cdots$	$\Delta_{2,s}$
$\Delta_{3,1} = b_3$	$\Delta_{3,2}$	$\Delta_{3,3}$	$\Delta_{3,4}$	$\Delta_{3,5}$	$\Delta_{3,6}$	$\cdots$	$\Delta_{3,s}$
$\Delta_{4,1} = b_4$	$\Delta_{4,2}$	$\Delta_{4,3}$	$\Delta_{4,4}$	$\Delta_{4,5}$	$\Delta_{4,6}$	$\cdots$	$\Delta_{4,s}$
$\Delta_{5,1} = b_5$	$\Delta_{5,2}$	$\Delta_{5,3}$	$\Delta_{5,4}$	$\Delta_{5,5}$	$\Delta_{5,6}$	$\cdots$	$\Delta_{5,s}$
$\Delta_{6,1} = b_6$	$\Delta_{6,2}$	$\Delta_{6,3}$	$\Delta_{6,4}$	$\Delta_{6,5}$	$\Delta_{6,6}$	$\cdots$	$\Delta_{6,s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\Delta_{r,1} = b_r$	$\Delta_{r,2}$	$\Delta_{r,3}$	$\Delta_{r,4}$	$\Delta_{r,5}$	$\Delta_{r,6}$	$\cdots$	$\Delta_{r,s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Řádky matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a})$ jsou <u>diferenční posloupnosti</u> (posloupnosti rozdílů), sloupce matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a})$ jsou <u>stabilní posloupnosti</u> (posloupnosti součtů).

Prvním řádkem matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a})$ je původní posloupnost $\boldsymbol{a}$. Posloupnost prvků prvního sloupce označme $\boldsymbol{b}$.

$b_1 = \Delta_{1,1} = a_1$

$b_2 = \Delta_{2,1} = a_2 - a_1$

$b_3 = \Delta_{3,1} = \Delta_{2,2} - \Delta_{2,1} = \Delta_{1,3} - \Delta_{1,2} - (\Delta_{1,2} - \Delta_{1,1}) = a_3 - 2a_2 + a_1$

$b_4 = \Delta_{4,1} = \Delta_{3,2} - \Delta_{3,1} = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1$

$\vdots$

Prvky prvního sloupce matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a})$ lze vyjádřit pomocí prvků prvního řádku této matice a naopak. Vyjadřují to následující vztahy pro všechna $r, s \geq 1$

$$b_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r-1}{k-1} a_k$$

$$a_s = \sum_{k=1}^{s} \binom{s-1}{k-1} b_k.$$

Součet prvních n členů posloupnosti $\boldsymbol{a}$ lze vyjádřit pomocí prvků posloupnosti $\boldsymbol{b}$. Posloupnost částečných součtů $\boldsymbol{s}$, kde

$$s_n = \sum_{s=1}^{n} a_s\,, n \geq 1$$

lze vyjádřit vztahem

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k.$$

6. ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

DEFINICE 10. Aritmetickou posloupností vyššího řádu nazýváme posloupnost, pro kterou platí $\Delta_{r,s} = 0$ pro všechna $s \geq 1$. Řád takové posloupnosti je nejmenší číslo t, pro které platí $\Delta_{t+2,s} = 0$ pro všechna $s \geq 1$. Takovou posloupnost budeme značit **APt**, kde t značí řád posloupnosti.

Pro aritmetickou posloupnost $\boldsymbol{a}$ platí, že příslušné matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a})$ má konečný počet nenulových řádků. Jestliže je řád matice t, je jen prvních $t+1$ řádků matice $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a})$ nenulových, další jsou nulové.

Aritmetická posloupnost zadaná prvním členem $a \neq 0$ a diferencí $d \neq 0$, známá z elementární algebry, je posloupností prvního řádu (**AP1**), má dva nenulové řádky.

Aritmetická posloupnost zadaná prvním členem $a \neq 0$ a diferencí $d = 0$ je posloupností nultého řádu (**AP0**), má jeden nenulový řádek.

Aritmetická posloupnost zadaná prvním členem $a = 0$ a diferencí $d = 0$ je posloupností řádu -1, všechny řádky jsou nulové.

Ke každé aritmetické posloupnosti $\boldsymbol{a} = (a_s, s \geq 1)$ existuje jednoznačně určený polynom $P(x)$ stupně t, pro který platí $P(n) = a_n$. Tedy mezi polynomy a aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů existuje bijektivní korespondence.

► ***PŘÍKLAD 26.*** Posloupnost je tvořena podle pravidla, které předem neznáme.

Zadané členy:

$a_1 = 5, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = 0,$

$a_5 = -21, a_6 = -75, a_7 = -176, a_8 = -338$

a) Je to aritmetická posloupnost vyššího řádu?

Řešení:

5	-1	2	0	-21	-75	-176	-338	**AP3**
-6	3	-2	-21	-54	-101	-162		**AP2**
9	-5	-19	-33	-47	-61			**AP1**
-14	-14	-14	-14	-14				**AP0**
0	0	0	0					

Ano, jde o aritmetickou posloupnost 3. řádu.

b) Najděte předpis pro součet prvních *n* členů této posloupnosti.

Řešení:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s = 5\binom{n}{1} - 6\binom{n}{2} + 9\binom{n}{3} - 14\binom{n}{4}$$

c) Sečtěte prvních deset členů této posloupnosti.

Řešení:

$$\sum_{s=1}^{10} a_s = 5\binom{10}{1} - 6\binom{10}{2} + 9\binom{10}{3} - 14\binom{10}{4}$$

$$= 50 - 270 + 1080 - 2940 = -2080$$

d) Určete předpis pro *n* – tý člen posloupnosti.

Řešení:

Posloupnost je třetího řádu, členy posloupnosti se dají vyjádřit jako polynom třetího stupně $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; hledáme konstanty *a, b, c, d*.

$P(1) = a + b + c + d = 5$

$P(2) = 8a + 4b + 2c + d = -1$

$P(3) = 27a + 9b + 3c + d = 2$

$P(4) = 64a + 16b + 4c + d = 0$

Soustavu rovnic vyřešíme Gaussovou metodou úpravami příslušné rozšířené matice.

$$a = -\frac{7}{3}\,, b = \frac{37}{2}\,, c = -\frac{271}{6}\,, d = 34.$$

Polynom příslušný k posloupnosti má tvar:

$$P(x) = -\frac{7}{3}x^3 + \frac{37}{2}x^2 - \frac{271}{6}x + 34.$$

Předpis pro *n* – tý člen posloupnosti

$$a_n = -\frac{7}{3}\,n^3 + \frac{37}{2}n^2 - \frac{271}{6}\,n + 34.$$

► ***PŘÍKLAD 27.*** Je zadáno prvních sedm členů aritmetické posloupnosti vyššího řádu:

$a_1 = -5, a_2 = -2, a_3 = 5, a_4 = 16, a_5 = 31, a_6 = 50, a_7 = 73.$

a) Určete řád posloupnosti.

Řešení:

-5	-2	5	16	31	50	73	**AP2**
3	7	11	15	19	23		**AP1**
4	4	4	4	4			**AP0**
0	0	0	0				

Jde o posloupnost 2. řádu.

b) Určete předpis pro *n* – tý člen posloupnosti.

Řešení:

Posloupnosti odpovídá polynom druhého stupně $P(x) = ax^2 + bx + c$. Hledáme konstanty *a, b, c.*

$P(1) = a + b + c = -5$

$P(2) = 4a + 2b + c = -2$

$P(3) = 9a + 3b + c = 5$

$a = 2\,, b = -3, c = -4$

Polynom příslušný k posloupnosti má tvar:

$$P(x) = 2\,x^2 - 3x - 4.$$

Předpis pro n – tý člen posloupnosti

$$a_n = 2n^2 - 3n - 4.$$

c) Určete rekurentní předpis posloupnosti.

Řešení:

$a_n = 2n^2 - 3n - 4$

$a_{n+1} = 2(n+1)^2 - 3(n+1) - 4 = 2n^2 + n - 5 = a_n + 4n - 1$

Rekurentní předpis

$a_{n+1} = a_n + 4n - 1.$

d) Vypočtěte a_{10}.

Řešení:

$a_n = 2n^2 - 3n - 4$

$a_{10} = 2 \cdot 100 - 3 \cdot 10 - 4 = 166$

6. 1. POSLOUPNOSTI MOCNIN

Jde o posloupnosti typu $a_n = n^k,\ k \in N, k \geq 2$. Řády posloupností $t = k$.

Řešené problémy se týkají součtu prvních *n* členů posloupností.

PŘÍKLAD 28. Pomocí posloupnosti ***b*** určete součet prvních sto členů posloupnosti ***a***, kde $a_s = s^2$.

Řešení:

1	4	9	16	25	**AP2**
3	5	7	9		**AP1**
2	2	2			**AP0**
0	0				

$$\sum_{s=1}^{n} s^2 = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 3 + \binom{n}{3} \cdot 2$$

$$\sum_{s=1}^{100} s^2 = \binom{100}{1} \cdot 1 + \binom{100}{2} \cdot 3 + \binom{100}{3} \cdot 2 = 338350$$

PŘÍKLAD 29. Pomocí posloupnosti ***b*** určete součet prvních *n* členů posloupnosti ***a***, kde $a_s = s^5$.

Řešení:

1	32	243	1024	3125	7776	16807	**AP5**
31	211	781	2101	4651	9031		**AP4**
180	570	1320	2550	4380			**AP3**
390	750	1230	1830				**AP2**
360	480	600					**AP1**
120	120						**AP0**
0							

$$\sum_{s=1}^{n} s^5 = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 31 + \binom{n}{3} \cdot 180 + \binom{n}{4} \cdot 390 + \binom{n}{5} \cdot 360 + \binom{n}{6} \cdot 120$$

Jak uvádí Juškevič [5], některými z těchto posloupností se zabývali matematici již v jedenáctém století. Například bagdádský matematik Abú Bakr Muhammad ibn al-Hasan al-Karadží, spíše známý jako al-Kardží, napsal roku 1010 obsáhlý traktát Al- Fachrí. V něm uvádí a odvozuje pravidla pro součty některých posloupností. Nepovedlo se mu dokázat pravidlo pro součet druhých mocnin, ale elegantně odvodil geometricko-aritmetické pravidlo pro součet třetích mocnin.

Al-Kardží uvažoval čtverec o straně rovné

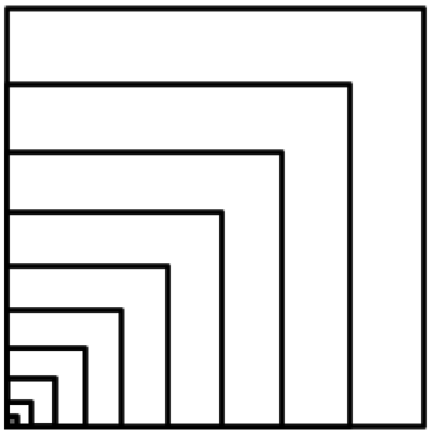
$$\sum_{x=1}^{n} x.$$

Rozdělil jej na gnómony o šířkách $n, n-1, n-2, \ldots, 2$ a čtverec o straně 1 (Obr. 7). Porovnal plochu původního čtverce se součtem ploch gnómonů a čtverce o straně 1. Největší gnómon má plochu

$$2n \sum_{x=1}^{n} x - n^2 = 2n \cdot n \cdot \frac{n+1}{2} - n^2 = n^3.$$

Analogicky menší gnómony mají plochy $(n-1)^2, (n-2)^2, \ldots, 2^2$. Tedy musí platit

$$\sum_{x=1}^{n} x^3 = \left(\sum_{x=1}^{n} x\right)^2.$$



Obr. 7: Gnómony

PŘÍKLAD 30. Vypočtěte součet třetích mocnin čísel od 1 do 50.

Řešení:

$$\sum_{x=1}^{50} x^3 = \left(\sum_{x=1}^{50} x^2\right)^2 = \left(50 \cdot \frac{50+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{50 \cdot 51}{2}\right)^2 = 1625625$$

6.1.1. POSLOUPNOSTI PRVNÍCH MOCNIN

Problém součtu prvních n členů se může řešit různými způsoby.

PŘÍKLAD 31. Pomocí posloupnosti ***b*** odvoďte předpis pro součet prvních n členů posloupnosti ***a***, $a_s = s, s \geq 1$. Předpis užijte pro součet prvních osmi členů.

Řešení:

1	2	3	4	**AP1**
1	1	1		**AP0**
0	0			

$$\sum_{s=1}^{n} a_s = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 1 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\sum_{s=1}^{8} a_s = \binom{8}{1} \cdot 1 + \binom{8}{2} \cdot 1 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

► ***PŘÍKLAD 32.*** Pro posloupnost ***a,*** kde $a_s = s,\ s \geq 1$, je posloupnost o n členech stanovte průměrnou hodnotu členu a_s, sestavte předpis pro součet n prvních členů (tak to provedl mladý Gauss roku 1786). Tutéž úlohu vyřešte pro $n = 8$.

Řešení:

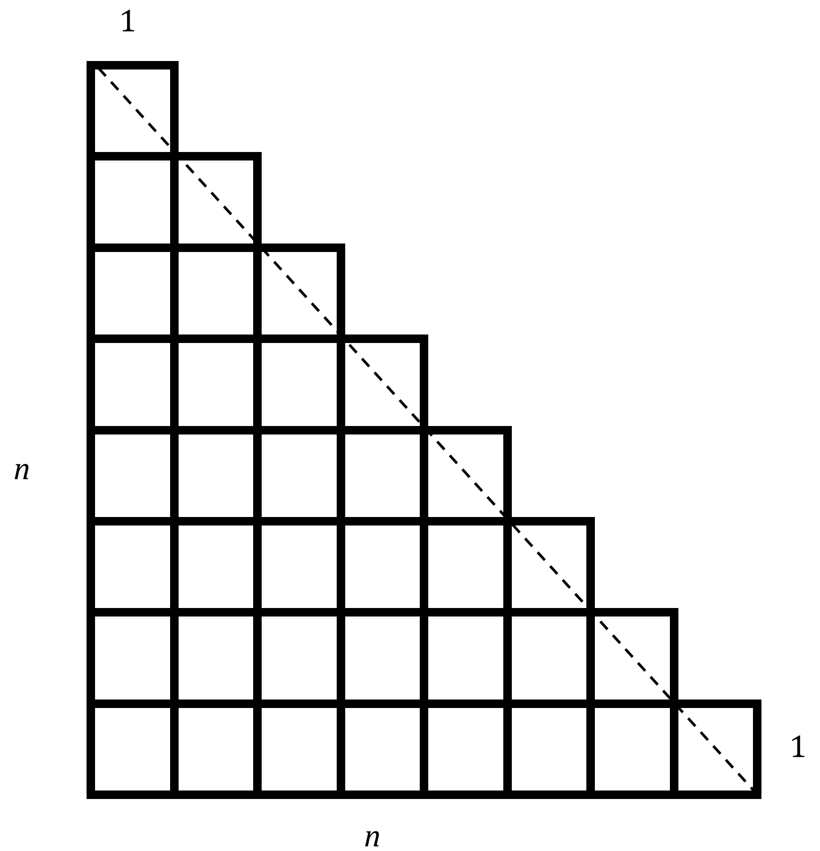
Průměrná hodnota členu

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{1 + n}{2}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_s = \frac{1 + n}{2} \cdot n = \frac{n + n^2}{2}$$

$$\sum_{s=1}^{8} a_s = \frac{8 + 64}{2} = 36$$

► ***PŘÍKLAD 33.*** Geometrická interpretace součtu prvních mocnin pomocí výpočtu plochy obrazce (Obr. 8).



Obr. 8: Obrazec – výpočet plochy

Plochu rozdělíme na rovnoramenný trojúhelník s ramenem n a n trojúhelníčků s ramenem 1. Mají plochy

$$\frac{n^2}{2}, n \cdot \frac{1}{2}.$$

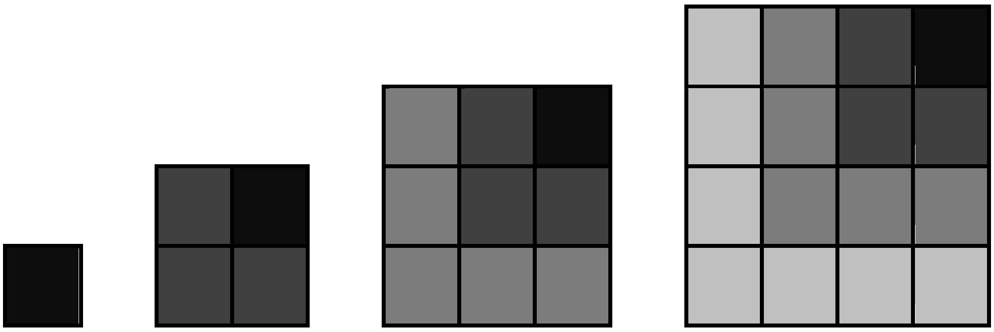
Obrazec má plochu

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}, \text{tedy } 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

6.1.2. POSLOUPNOSTI DRUHÝCH MOCNIN

Pomocí posloupnosti ***b*** vyřešeno v příkladu 28.

► ***PŘÍKLAD 34.*** Geometrická interpretace součtu druhých mocnin pomocí výpočtu plochy obrazce.

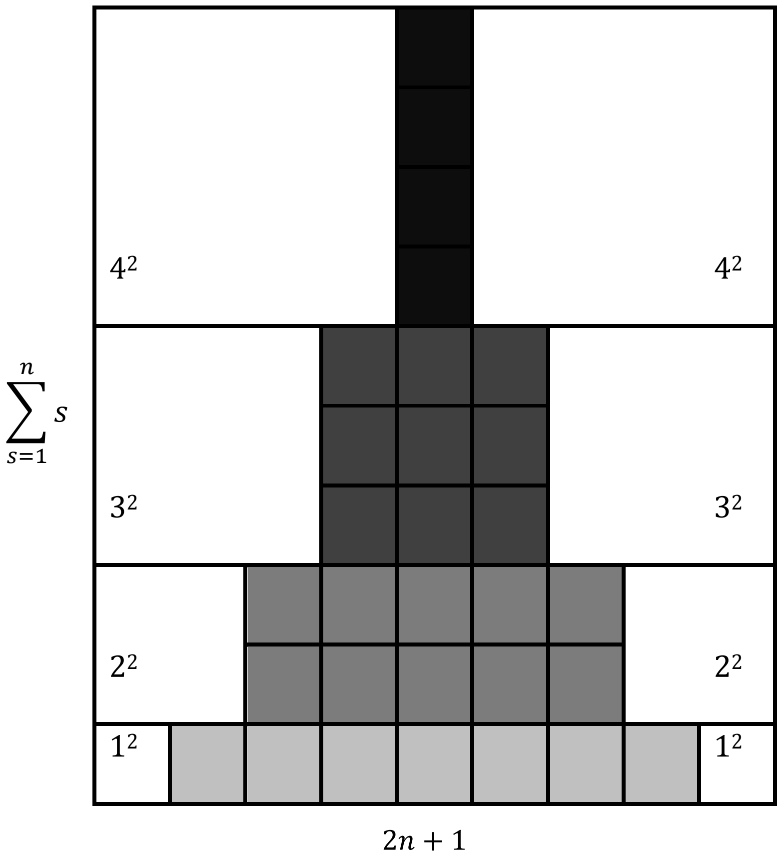


1^2 2^2 3^2 4^2

Obr. 9: Čtverce – druhé mocniny

Čtverce (Obr. 9) umístíme do obdélníku o stranách

$$2n + 1, \sum_{s=1}^{n} s.$$



Obr. 10: Obdélník – součet druhých mocnin

Obdélník (Obr. 10) o ploše

$$(2n + 1) \cdot \sum_{s=1}^{n} s$$

je složen z vybarvených útvarů o celkové ploše $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

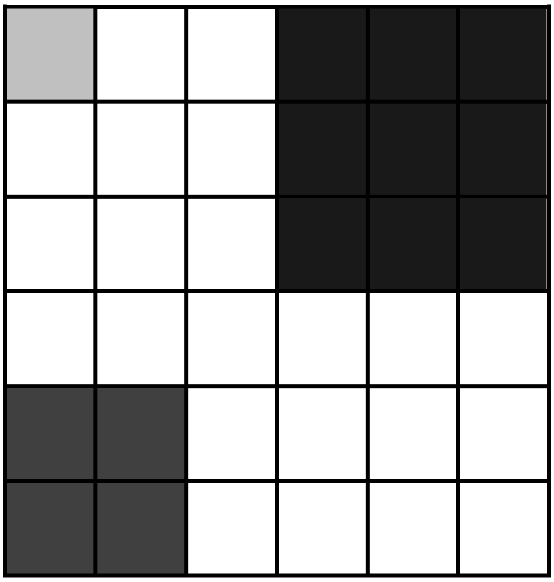
Tedy

$$3 \cdot \sum_{s=1}^{n} s^2 = (2n + 1) \cdot \sum_{s=1}^{n} s,$$

$$\sum_{s=1}^{n} n^2 = \frac{1}{3} \cdot (2n + 1) \cdot \sum_{s=1}^{n} s.$$

► ***PŘÍKLAD 35.*** Najděte počet čtverců ve čtvercové síti 6×6. Zobecněte pro čtvercovou síť $n \times n$.

Řešení:



Obr. 11: Čtvercová síť

čtverec	počet čtverců	obecně
1×1	$6^2 = 36$	n^2
2×2	$5^2 = 25$	$(n-1)^2$
3×3	$4^2 = 16$	$(n-2)^2$
4×4	$3^2 = 9$	$(n-3)^2$
5×5	$2^2 = 4$	$(n-4)^2$
6×6	$1^2 = 1$	$(n-5)^2$
		$\vdots$
		2^2
		1^2
Celkový počet	91	$\sum_{s=1}^{n} s^2$

Z předchozího příkladu plyne

$$\sum_{s=1}^{n} s^2 = \frac{1}{3} \cdot (2n+1) \cdot \sum_{s=1}^{n} s = \frac{1}{3} \cdot (2n+1) \cdot n \cdot \frac{n+1}{2} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (2n+1) \cdot (n+1)$$

6.1.3. Posloupnosti třetích mocnin

Příklad 36. Pomocí posloupnosti ***b*** určete součet prvních padesáti členů posloupnosti ***a***, kde $a_s = s^3$.

Řešení:

1	8	27	64	125	216	**AP3**
7	19	37	61	91		**AP2**
12	18	24	30			**AP1**
6	6	6				**AP0**
0	0					

$$\sum_{s=1}^{n} s^3 = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 7 + \binom{n}{3} \cdot 12 + \binom{n}{4} \cdot 6$$

$$\sum_{s=1}^{n} s^3 = \binom{50}{1} \cdot 1 + \binom{50}{2} \cdot 7 + \binom{50}{3} \cdot 12 + \binom{50}{4} \cdot 6 =$$

$$= 50 \cdot 1 + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 7 + \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{6} \cdot 12 + \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{24} \cdot 6 =$$

$$= 50 + 8575 + 235200 + 1382800 = 1625625$$

► ***PŘÍKLAD 37.*** Najděte počet krychlí v krychlové síti $6 \times 6 \times 6$. Zobecněte pro krychlovou síť $n \times n \times n$.

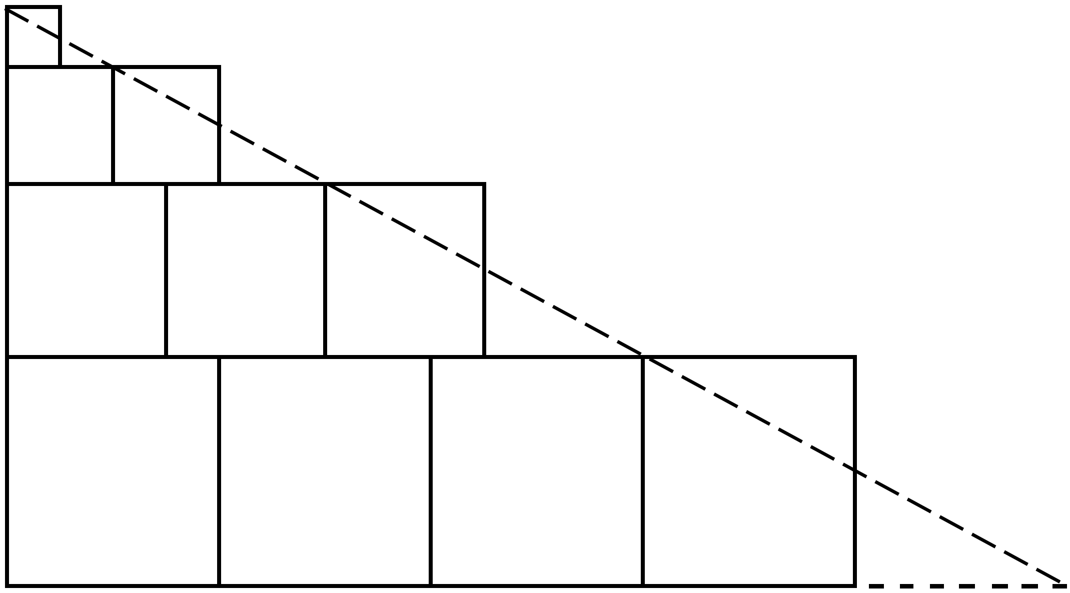
Řešení:

krychle	počet krychlí	obecně
$1 \times 1 \times 1$	$6^3 = 216$	n^3
$2 \times 2 \times 2$	$5^3 = 125$	$(n-1)^3$
$3 \times 3 \times 3$	$4^3 = 64$	$(n-2)^3$
$4 \times 4 \times 4$	$3^3 = 27$	$(n-3)^3$
$5 \times 5 \times 5$	$2^3 = 8$	$(n-4)^3$
$6 \times 6 \times 6$	$1^3 = 1$	$(n-5)^3$
		$\vdots$
		2^3
		1^3
Celkový počet	441	$\sum_{s=1}^{n} s^3$

Z předchozího příkladu plyne

$$\sum_{s=1}^{n} s^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$$

► ***Příklad 38.*** Geometrická interpretace součtu třetích mocnin pomocí výpočtu plochy obrazce.



Obr. 12: Obrazec – součet třetích mocnin

Součet ploch čtverců na obrázku $1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2$ je roven obsahu znázorněného trojúhelníku, tedy je roven výrazu

$$\frac{1}{2} \cdot (4 + 1) \cdot 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4).$$

Zobecnění pro analogický obrazec vytvořený z n čtverců: Součet ploch čtverců $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ je roven

$$\frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot n \cdot \sum_{s=1}^{n} s.$$

6. 2. PASCALŮV TROJÚHELNÍK A POSLOUPNOSTI

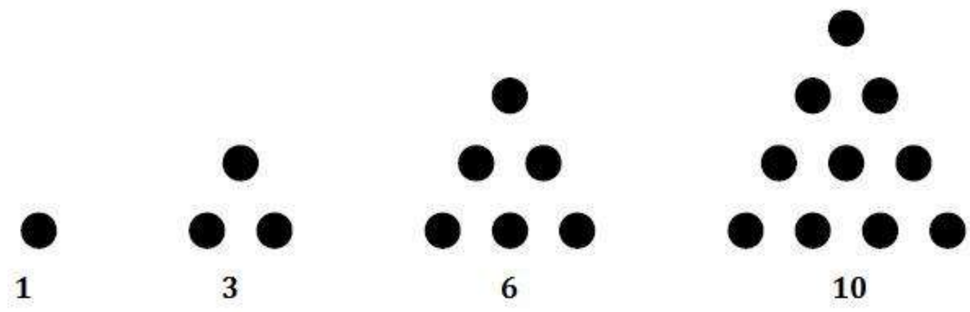
Pascalův trojúhelník je schéma přirozených čísel se zajímavými vlastnostmi. Šikmé sloupce trojúhelníku jsou aritmetické posloupnosti.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Obr. 13: Pascalův trojúhelník

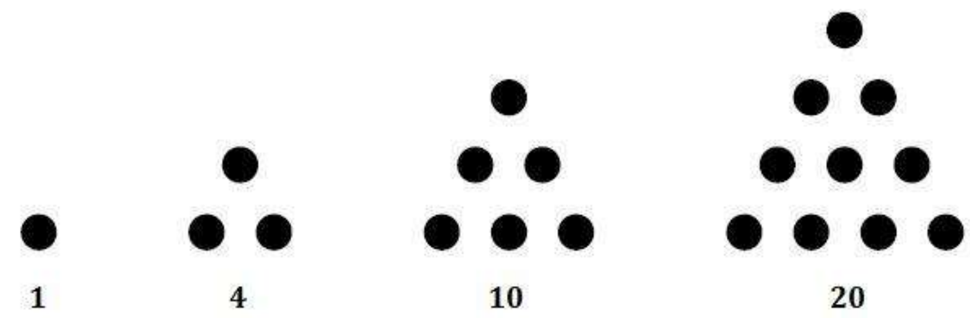
První šikmý sloupec je aritmetická posloupnost 0. řádu, druhý šikmý sloupec je aritmetická posloupnost prvního řádu, třetí šikmý sloupec je aritmetická posloupnost druhého řádu, atd. n – tý šikmý sloupec je aritmetická posloupnost řádu $(n-1)$ a jí odpovídající aritmetická posloupnost řádu $(n-2)$ je $(n-1)$ šikmý sloupec.

Zajímavá je geometrická interpretace čísel v Pascalově trojúhelníku jako figurálních čísel. Např. ve třetím šikmém sloupci jsou trojúhelníková čísla 1, 3, 6, 10 atd.



Obr. 14: Trojúhelníková čísla [15]

Ve čtvrtém šikmém sloupci jsou čtyřstěnová čísla 1, 4, 10, 20 atd.



Obr. 15: Čtyřstěnová čísla [15]

V dalším rozumíme šikmým sloupcem sloupec jdoucí zprava shora doleva dolů.

Lze vytvářet číselná schémata podobná Pascalově trojúhelníku, ve kterých je zachován vztah mezi posloupnostmi v šikmých sloupcích, kde první členy posloupností nemusí být rovny číslu jedna. Můžeme je zadat.

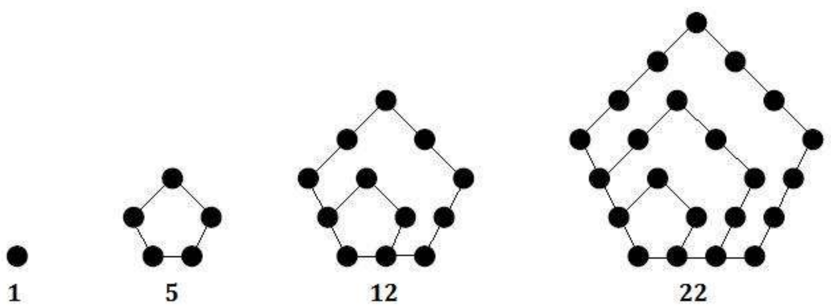
► ***PŘÍKLAD 39.*** Jsou zadány první členy prvních tří sloupců 3, 1, 1. Sestavte číselné schéma podobné Pascalovu trojúhelníku, určete prvních pět členů aritmetických posloupností 0., 1., 2. řádu.

Řešení:

3		
3	1	
3	4	1
3	7	5
3	10	12
3	13	22
3	16	35

Prvních pět členů posloupnosti nultého řádu jsou čísla 3, 3, 3, 3, 3. Prvních pět členů posloupnosti 1. řádu jsou čísla 1, 4, 7, 10, 13. Prvních pět členů posloupnosti 2. řádu jsou čísla 1, 5, 12, 22, 35.

Pozn.: Členy nalezené posloupnosti druhého řádu jsou tzv. pětiúhelníková čísla.



Obr. 16: Pětiúhelníková čísla [15]

7. ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI VYŠŠÍCH ŘÁDŮ NA STŘEDNÍ ŠKOLE

Na Soukromé podnikatelské střední škole v České Lípě byl ve čtvrtém ročníku zařazen výklad o aritmetických posloupnostech vyšších řádů. V samostatné práci studentů bylo ověřováno zvládnutí tématu a schopnost aplikace na příkladu.

7. 1. PŘÍPRAVA VÝUKOVÉ HODINY

1) První tři členy posloupnosti jsou 3, 7, 11. Jde o aritmetickou posloupnost. Určete její další členy.

Této posloupnosti budeme říkat aritmetická posloupnost prvního řádu.

Znáte také posloupnost nultého řádu – všechny členy jsou stejné (konstantní), např.: 1, 1, 1, …

<u>2) Co je aritmetická posloupnost vyššího řádu?</u>

Existují také posloupnosti řádu 2 a vyšší.

► **Příklad**: 9, 18, 31, 48 jsou první čtyři členy posloupnosti. Jak zjistíme její řád? Vytvoříme novou posloupnost (nižšího řádu) tak, že od následujícího členu odečteme předchozí člen. Totéž opakujeme, až dojdeme k nulové posloupnosti.

9	18	31	48	**AP2**
9	13	17		**AP1**
4	4			**AP0**
0				

Zadaná posloupnost je tedy druhého řádu.

3) Proč zjišťujeme řád posloupnosti?

Protože existuje souvislost mezi řádem posloupnosti a nalezením předpisu pro $n -$ tý člen.

Platí totiž, že členy posloupnosti s – tého řádu jsou hodnoty polynomu s – tého stupně.

V naší úloze jde o polynom druhého stupně, tedy výraz $P(n) = An^2 + Bn + C$. Naším úkolem je najít konstanty *A, B, C*.

$a_1 = P(1) = A1^2 + B1 + C$
$a_2 = P(2) = A2^2 + B2 + C$
$a_3 = P(3) = A3^2 + B3 + C$

Řešíme soustavu rovnic

$A + B + C = 9$
$4A + 2B + C = 18$
$9A + 3B + C = 31$

Řešení soustavy je $A = 2, B = 3, C = 4$. Tedy $a_n = P(n) = 2n^2 + 3n + 4$.
Ilustrace: $a_5 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 69, a_6 = 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 4 = 94$.

4) ► **Příklad**:

Prvních pět členů posloupnosti jsou 0, 4, 18, 48, 100. Určete řád této posloupnosti, předpis pro n − tý člen. Vypočtěte členy a_{10}, a_{100}.

Řešení:

Posloupnost je třetího řádu, $P(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$. Soustava rovnic pro koeficienty polynomu má řešení $A = 1, B = -1, C = 0, D = 0$, $a_n = P(n) = n^3 - n^2$.

Tedy $a_{10} = 10^3 - 10^2 = 900, a_{100} = 100^3 - 100^2 = 990000$.

7. 2. ÚVOD PŘED SAMOSTATNOU PRACÍ

Následující hodina byla věnována samostatné práci studentů. V první části hodiny byla společně vyřešena část příkladu. Následně byly žákům zadány čtyři úkoly (dokončení příkladu), které řešili samostatně.

► **Příklad**: Určete maximální počet oblastí, na které rovinu rozdělí n přímek (tři a více přímek nemá společný průsečík).

Počet přímek	Počet oblastí
$n = 1$	$a_1 = 2$
$n = 2$	$a_2 = 4$
$n = 3$	$a_3 = 7$

Odvození předpisu pro a_n. Přidáním třetí přímky přibudou tři oblasti, přidáním čtvrté přímky přibudou čtyři oblasti, přidáním $n -$ té přímky přibude n oblastí. Tedy $a_n = a_{n-1} + n$.

7. 3. SAMOSTATNÁ PRÁCE STUDENTŮ

Zadání:

1) Určete a_4, a_5, a_6.

2) Určete řád posloupnosti.

3) Určete předpis pro $n -$ tý člen (pomocí polynomu).

4) Určete člen a_{15}.

7. 4. ZHODNOCENÍ SAMOSTATNÉ PRÁCE STUDENTŮ

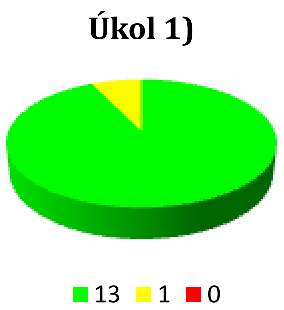
Výukových hodin se zúčastnilo celkem 14 studentů. Úkoly 1) až 4) byly hodnoceny samostatně a hodnocení rozděleno do tří kategorií:

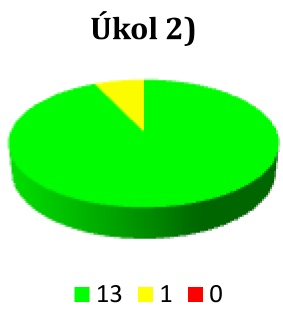
I) vyřešeno zcela dobře

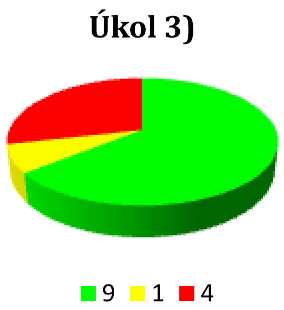
II) postup správný, početní chyba

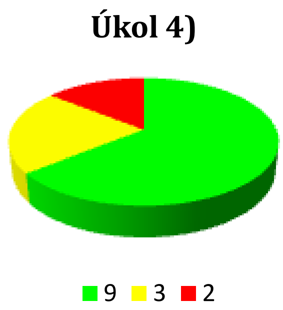
III) úkol nesplněn.

Výsledky studentů jsou znázorněny ve výsečových grafech.









Studentům nedělalo problém určit další členy a řád posloupnosti. Souvislost mezi předpisem pro $n-$tý člen a polynomem příslušného stupně dobře užilo 10 studentů, tedy 71 %. 12 studentů, tedy 86 %, zvládlo určit patnáctý člen posloupnosti, 3 z nich nevyužili pro výpočet patnáctého členu posloupnosti předpis pro $n-$tý člen vypočítaný ve třetí úloze.

8. ZÁVĚR

V první části diplomové práce je zmíněna historie posloupností. První výpočty související s geometrickými posloupnostmi se objevují (při výpočtu úroků) už ve 3. tisíciletí před n. l.

Pythagorejci (6. století před n. l.) úzce spojili čísla a tvary, za mystický a estetický vrchol považovali „zlatý řez". Tento pojem neužívali, zavedl jej až Leonardo da Vinci. Další konstrukce zlatého řezu uvedli Euklides a Herón.

Zlatý řez se objevuje v dílech přírody (okvětní lístky, ulity) i v lidských dílech (architektura, malířství, sochařství).

Souvislost mezi zlatým řezem a posloupností se našla později, konkrétně jde o Fibonacciho posloupnost.

V druhé části diplomové práce jsou uvedeny základní pomy týkající se posloupností (způsoby zadání a vlastnosti posloupností), pasáž o aritmetických a geometrických posloupnostech je zpracována na úrovni středoškolské výuky.

Další část diplomové práce se zabývá posloupnostmi vyšších řádů, zejména aritmetických posloupností vyšších řádů, předpisy pro $n-$ tý člen a výpočtem součtu prvních n členů posloupností. Výjimečné postavení mezi aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů mají posloupnosti mocnin. Objevují se v historii matematiky dávno před tím (např. v 11. století Al – Kardží) než byla vytvořena ucelená teorie aritmetických posloupností vyšších řádů. Důmyslnými geometrickými interpretacemi byl řešen problém součtů prvních členů těchto posloupností.

Úlohy související s aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů se objevují v matematických olympiádách, v běžné výuce matematiky na středních i vysokých školách toto téma není zařazeno.

V rámci diplomové práce byla na střední škole realizována výukový hodina s náplní – aritmetické posloupnosti vyšších řádů. Studenti byli seznámeni s pojmem řád posloupnosti, se spojitostí mezi řádem posloupnosti a stupněm polynomu, pomocí něhož lze určit předpis pro $n-$tý člen. Výpočet součtu u prvních n členů nebyl uveden. V následující výukové hodině byla zařazena samostatná práce studentů. Z výsledků samostatné práce plyne, že studenti látce porozuměli a uměli ji aplikovat.

Cílem diplomové práce bylo i posouzení vhodnosti zařazení tématu do výuky matematiky. Téma aritmetické posloupnosti vyšších řádů je vhodné zařadit do matematických seminářů na střední škole i do kurzů matematiky na vysoké škole jako rozšiřující učivo. Do běžné povinné výuky matematiky na střední škole není vhodné téma zařazovat. Látka probíraná na střední škole má i bez tohoto tématu velký rozsah. Vhodné ale je zařadit ukázky vtipných geometrických interpretací součtů mocninných posloupností včetně historických odkazů.

Aby mohlo být toto téma zavedeno do výuky jakýmkoli způsobem, je nutné vytvořit příslušný učební text srozumitelný středoškolákům doplněný vhodnými úlohami. V této práci jsou vhodné úlohy označeny ►.

9. POUŽITÁ LITERATURA

[1] Beránek, J.: *Zlatý řez v matematice i mimo ni.* [online]. [cit. 13. 11. 2010]. Dostupné z URL <http://mathworld.ic.cz/pdf/zlaty-rez-v-matematice-i-mimo-ni.pdf >.

[2] Cibulková, E. - Kubešová, N.: *MATEMATIKA – přehled středoškolského učiva.* Třebíč: Petra Velanová, 2006, 1.vyd., s. 242. ISBN 978-80-86873-05-3.

[3] Delvin, K.: *Jazyk matematiky*. Praha: Dokořán, Argo, 2003, 1. vyd., s. 344. ISBN 80-86569-09-8 (Dokořán), 80-7203-470-7 (Argo).

[4] Dlab, V.: *Aritmetické posloupnosti vyšších řádů.* [online]. [cit. 13. 11. 2010]. Dostupné z URL <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/literatura/aritm-posl.pdf>.

[5] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Československá akademie věd - Academia, 1978, 1. vyd., s. 448. ISBN 509-21-857.

[6] Mareš, M.: *Příběhy matematiky.* Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008, 1. vyd., s. 336. ISBN 9787-80-87053-16-4.

[7] Musilová, J. - Musilová, P.: *Matematika I pro porozumění i praxi.* Brno: Vysoké učení v Brně/Nakladatelství VUTIUM, 2006, 1. vyd., s. 284. ISBN 80-214-2914-3.

[8] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady.* Praha: Prometheus, 1996, 1. vyd., s. 128. ISBN 80-85849-91-7.

[9] Odvárko, O.: *Posloupnosti a finanční matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť.* Praha: Prometheus, 2007, 1. vyd., s. 126. ISBN 978-80-7196-239-7.

[10] Odvárko, O.: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – Posloupnosti a řady.* Praha: Prometheus, 1997, 1. vyd., s. 50. ISBN 80-7196-054-3.

[11] Seife, Ch.: *Nula – životopis jedné nebezpečné myšlenky.* Praha: Dokořán, 2005, 1. vyd., s. 268. ISBN 80-7363-048-6.

[12] Stewart, I.: *Čísla přírody*. Bratislava: Archa, 1996, 1. vyd., s. 170. ISBN 80-7115-119-X.

[13] Zhouf, J.: *Aritmetická posloupnost druhého řádu.* [online]. [cit. 13. 11. 2010]. Dostupné z URL <http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_48.pdf>.

[14] Zhouf, J.: *Aritmetické posloupnosti vyšších řádů.* [online]. [cit. 13. 11. 2010]. Dostupné z URL <http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_105.pdf>.

[15] Zhouf, J.: *Figurální čísla, Pascalův trojúhelník, aritmetické posloupnosti vyšších řádů.* [online]. [cit. 13. 11. 2010]. Dostupné z URL <http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_42.pdf>.

10. PŘÍLOHY

1 Ukázky prací studentů

Příloha 1: Ukázky prací studentů

$a_1 = 2$

$a_2 = 4$

$a_3 = 7$

1\.

$a_4 = a_{n-1} + n = 7 + 4 = 11$

$a_5 = 11 + 5 = 16$

$a_6 = 16 + 6 = 22$

2\.

řád posloupnosti:

2	4	7	11	16	22	AP2
2	3	4	5	6	AP1	
1	1	1	1		AP0	
0					AP0	

$P_{(n)} = An^2 + Bn + C$

$2 = A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C$

$4 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2 + C$

$7 = A \cdot 3^2 + B \cdot 3 + C$

$A = 0{,}5$

$B = 0{,}5$

$C = 1$

$A + B + C = 2 \Rightarrow A = 2 - B - C$

$4A + 2B + C = 4$

$9A + 3B + C = 7$

$4(2-B-C) + 2B + C = 4$

$9(2-B-C) + 3B + C = 7$

$8 - 4B - 4C + 2B + C = 4$

$18 - 9B - 9C + 3B + C = 7$

$-2B - 3C = -4 \quad | \cdot (-3)$

$-6B - 8C = -11$

$6B + 9C = 12$

$-6B - 8C = -11$

$C = 1$

$\Rightarrow 4(2 - B - 1) + 2B + 1 = 4$

$8 - 4B - 4 + 2B + 1 = 4$

$-2B = -1$

$\underline{\underline{B = 0{,}5}}$

$A = 2 - 0{,}5 - 1$

$A = 0{,}5$

3\.

$a_n = 0{,}5n^2 + 0{,}5n + 1$

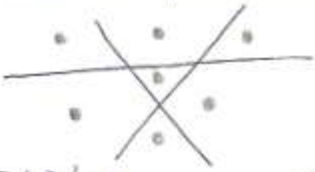
$a_{15} = 0{,}5 \cdot 15^2 + 0{,}5 \cdot 15 + 1$

$a_{15} = 112{,}5 + 7{,}5 + 1 = 121$

4\.

$\underline{\underline{a_{15} = 121}}$

Určete max. počet oblastí, na které rovinu rozdělí m přímek. 3 přímky nemají stejný průsečík



$$\boxed{a_m = a_{m-1} + m}$$

$a_4 = a_3 + 4$

počet přímek	počet oblastí
	a_m
$m = 1$	$a_1 = 2$
$m = 2$	$a_2 = 4$
$m = 3$	$a_3 = 7$

1. Určete a_4, a_5, a_6
2. určete řád posloupnosti
3. určete předpis pro m-tý člen (polynomy)
4. určete člen a_{15}

1. $a_4 = 7 + 4 = 11$

$a_5 = 11 + 5 = 16$

$a_6 = 16 + 6 = 22$

2.
$$\begin{array}{cccccccccl}
2 & \Leftarrow & 4 & \Leftarrow & 7 & \Leftarrow & 11 & \Leftarrow & 16 & 22)\ AP_2 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \\
2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & AP_1 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & AP_0 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & AP_0
\end{array}$$

$a_{15} = -\frac{3}{2} \cdot 15^2 + \frac{23}{2} \cdot 15 + 1 =$

$= \underline{\underline{-164}}$

$P_{(m)} = Am^2 + Bm + C$

$11 = A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C$

$16 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2 + C$

$22 = A \cdot 3^2 + B \cdot 3 + C$

$A + B + C = 11$

$4A + 2B + C = 18$

$9A + 3B + C = 22$

$A = 11 - B - C \quad \Rightarrow \quad A = 11 - \frac{23}{2} - 1 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$

$4(11 - B - C) + 2B + C = 18$

$9(11 - B - C) + 3B + C = 22$

$44 - 4B - 4C + 2B + C = 18$

$99 - 9B - 9C + 3B + C = 22$

$-2B - 3C = -26 \quad | \cdot (-3)$

$-6B - 8C = -77$

$\cancel{6B} + 9C = 78 \quad \Rightarrow \quad 6B + 9 = 78 \quad | -9$

$-\cancel{6B} - 8C = -77 \qquad 6B = 69 \quad | :6$

$\underline{C = 1} \qquad \underline{\underline{B = \frac{23}{2}}}$

$$\boxed{a_m = -\frac{3}{2} m^2 + \frac{23}{2} m + 1}$$

Určete maximální počet oblastí, na které rovinu rozdělí n přímek. když bude 3 a více přímek, žádný průsečík

počet přímek	počet oblastí
$n = 1$	a_n $a_1 = 2$
$n = 2$	a_n $a_2 = 4$
$n = 3$	a_n $a_3 = 7$

$a_n = a_{n-1} + n$

1) načtěte a_5, a_4, a_6

2) určete řád posloupnosti

3) určete předpis pro n-tý člen (polynomy)

4) určete člen a_{15}

$a_4 = 7 + 4 = 11$

$a_5 = 11 + 5 = 16$

$a_6 = 16 + 6 = 22$

2) $2 \leftarrow 4 \leftarrow 7 \leftarrow 11 \leftarrow 16 \leftarrow 22$ AP2

$2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 6$ AP1

$1 \leftarrow 1 \leftarrow 1 \leftarrow 1$ AP0

0 AP0

3) $P(n) = A \cdot n^2 + Bn + C$

$2 = A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C$

$4 = A \cdot 4 + B \cdot 2 + C$

$7 = A \cdot 9 + B \cdot 3 + C$

$A + B + C = 2$

$4A + 2B + C = 4$

$7A + 3B + C = 7$

$A = 2 - B - C$

$4(2 - B - C) + 2B + C = 4$

$9(2 - B - C) + 3B + C = 7$

$8 - 4B - 4C + 2B + C = 4$

$18 - 9B - 9C + 3B + C = 7$

$-2B - 3C = -4 \quad / \cdot (-3)$

$-6B - 8C = -11$

$+C = 1$

$C = +1$

$-2B - 3 = -4 \quad / +3$

$-2B = -1$

$B = \frac{1}{2}$

$A + \frac{1}{2} + 1 = 2 \quad / -1$

$A + \frac{1}{2} = 1 \quad / -0{,}5$

$A = 0{,}5$

4)

$a_7 = 22 + 7 = 29$

$a_8 = 29 + 8 = 37$

$a_9 = 37 + 9 = 46$

$a_{10} = 46 + 10 = 56$

$a_{11} = 56 + 11 = 67$

$a_{12} = 67 + 12 = 79$

$a_{13} = 79 + 13 = 92$

$a_{14} = 92 + 14 = 106$

$a_{15} = 106 + 15 = 121$